

Capitolo 3

MACCHINE A COLLETTORE

3.1 - Introduzione alle macchine a collettore

La teoria unificata consente una trattazione globale di tutte le macchine a collettore, indipendentemente dalle caratteristiche dell'alimentazione, che può essere costituita da sistemi di tensioni alternate mono o polifasi o da generatori di tensione continua.

Le diverse condizioni di alimentazione, pur corrispondendo a diverse configurazioni strutturali della macchina (poli massicci o laminati, corona di statore massiccia o laminata) impongono semplicemente diversi metodi di determinazione dei parametri e quindi diversi criteri di identificazione del modello della macchina.

La trattazione che verrà qui svolta prescinde tuttavia da questi problemi ed esamina invece le caratteristiche di funzionamento delle macchine le cui spazzole sono disposte lungo assi coincidenti con quelli magnetici (macchine a c.c., motori universali, motori monofasi serie, metamacchine). Particolare attenzione verrà rivolta al funzionamento in regime stazionario delle macchine a c.c. alimentate da un generatore ideale di tensione continua; lo studio di altri regimi o di altre particolari condizioni di alimentazione (ad esempio da convertitori statici) è comunque facilmente realizzabile, utilizzando sempre lo stesso modello della macchina fornito dalla teoria unificata.

Gli aspetti costruttivi ed i problemi connessi alla commutazione sono di proposito trascurati in questa trattazione in quanto ampiamente discussi in altri testi di macchine elettriche.

3.2 - Equazioni di funzionamento della macchina a c.c.

La macchina a c.c. che verrà nel seguito studiata presenta una struttura di statore anisotropa, con avvolgimenti che sostengono il campo magnetico (avvolgimenti di campo o di eccitazione) disposti lungo l'asse polare, ed un rotore con avvolgimento di tipo chiuso collegato a un collettore a lamelle (avvolgimento di armatura), su cui poggiano le spazzole lungo un asse normale a quello polare (asse neutro magnetico).

Il passaggio dalla macchina reale a quella primitiva equivalente è illustrato in fig. 3.1: gli avvolgimenti di eccitazione (per generalità se ne indicano due indipendenti) sono disposti lungo l'asse d ; l'avvolgimento di rotore coincide con l'avvolgimento pseudo-stazionario della macchina primitiva disposto lungo l'asse q . Il passaggio dalla macchina reale a quella primitiva avviene quindi facendo ricorso alle sole trasformazioni "attive" (v. par. 2.2).

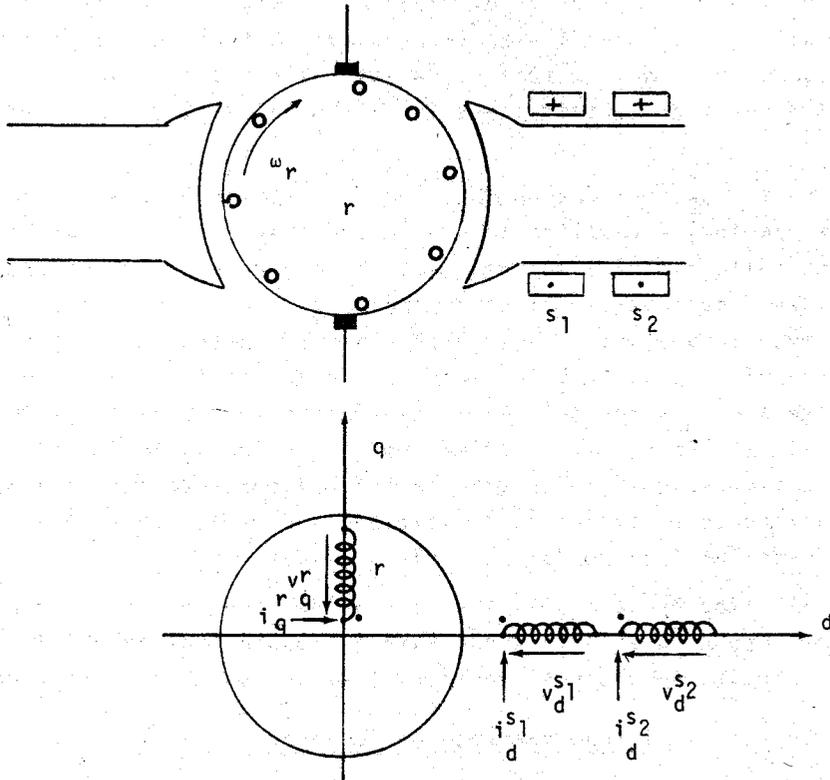


Figura 3.1

La macchina primitiva è a 2 poli, ma, per quanto già detto nel paragrafo 1.13, le espressioni a cui si perviene hanno validità generale.

Dalle equazioni (1.85) della macchina primitiva risulta quindi :

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ v_d \\ s_2 \\ v_d \\ v_q^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (R_d + L_d p) & M_{dd} (s_1)(s_2) p & 0 \\ M_{dd} (s_2)(s_1) p & (R_d + L_d p) & 0 \\ \omega_r G_{qd} r(s_1) & \omega_r G_{qd} r(s_2) & (R_q^r + L_q^r p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d^s \\ i_d^s \\ i_q^r \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Sostituendo i generici elementi della matrice G con le mutue induttanze tra le coppie di avvolgimenti (v.par. 1.13) il sistema (3.1) diventa :

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ v_d \\ s_2 \\ v_d \\ v_q^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (R_d + L_d p) & M_{dd} (s_1)(s_2) p & 0 \\ M_{dd} (s_2)(s_1) p & (R_d + L_d p) & 0 \\ \omega_r M_{dd} r(s_1) & \omega_r M_{dd} r(s_2) & (R_q + L_q p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d^s \\ i_d^s \\ i_q^r \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

e, l'espressione della coppia, dedotta dalla (1.87) è la seguente :

$$C_e = (\text{paia poli}) \begin{bmatrix} M_{dd} r(s_1) & i_d^s \\ i_q^r + M_{dd} r(s_2) & i_d^s \\ i_q^r \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

L'equazione di equilibrio meccanico, con le convenzioni di fig. 1.27, è quindi :

$$C_e + C_r = J p \omega_m \quad (3.4)$$

Le equazioni precedenti sono valide per lo studio in regime comunque variabile. Nel caso di regime stazionario i termini con la derivata sono nulli ($p = 0$).

3.3 - Funzionamento in regime stazionario di una macchina a c.c. con eccitazione compound

In questo paragrafo è esaminato il funzionamento in regime stazionario di una macchina a c.c. con eccitazione tipo compound, (serie+indipendente) che comprende come casi particolari i funzionamenti con eccitazione tipo serie o tipo indipendente.

L'avvolgimento serie (in serie con l'avvolgimento di armatura) può essere collegato in modo da sostenere una f.m.m. concorde o in opposizione con quella dell'avvolgimento indipendente

(serie addizionale o serie sottrattiva). Si noti che l'inversione della corrente di armatura determina anche l'inversione della eccitazione serie che passa da addizionale a sottrattiva. Di conseguenza una serie addizionale nel funzionamento da motore diventa sottrattiva in quello da generatore e viceversa (con tensione di armatura costante in valore e segno, il passaggio dal funzionamento da motore a quello da generatore corrisponde ad una inversione della corrente di armatura).

In fig. 3.2 è riportata la macchina reale con le due connessioni addizionale (3.2a) e sottrattiva (3.2b) nel funzionamento da motore e la corrispondente macchina primitiva (3.2c), coincidente con quella della figura 3.1. Con "a" è indicato l'avvolgimento di armatura, con "s" l'avvolgimento di eccitazione tipo serie e con "e" l'avvolgimento di eccitazione indipendente.

Il passaggio da macchina reale a macchina primitiva equivale ad una trasformazione di tipo attivo :

$$\begin{aligned}
 i_q^r &= i_a & i_d^{s2} &= i_e \\
 i_d^{s1} &= \pm i_a \text{ (+addizionale, - sottrattiva)} \\
 v_q^r &= v_a & v_d^{s1} &= v_s & v_d^{s2} &= v_e \\
 v &= v_q^r \pm v_d^{s1}
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

e, in forma matriciale (v. par. 2.2) :

$$\begin{bmatrix} i_d^{s1} \\ i_d^{s2} \\ i_q^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +1 & 0 \\ 0 & +1 \\ +1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_e \end{bmatrix} = [B] \begin{bmatrix} i_a \\ i_e \end{bmatrix} = [B] [i] \tag{3.6}$$

$$\begin{bmatrix} v \\ v_e \end{bmatrix} = [B]_t [v'] = \begin{bmatrix} +1 & 0 & +1 \\ 0 & +1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_d^{s1} \\ v_d^{s2} \\ v_q^r \end{bmatrix} = \tag{3.7}$$

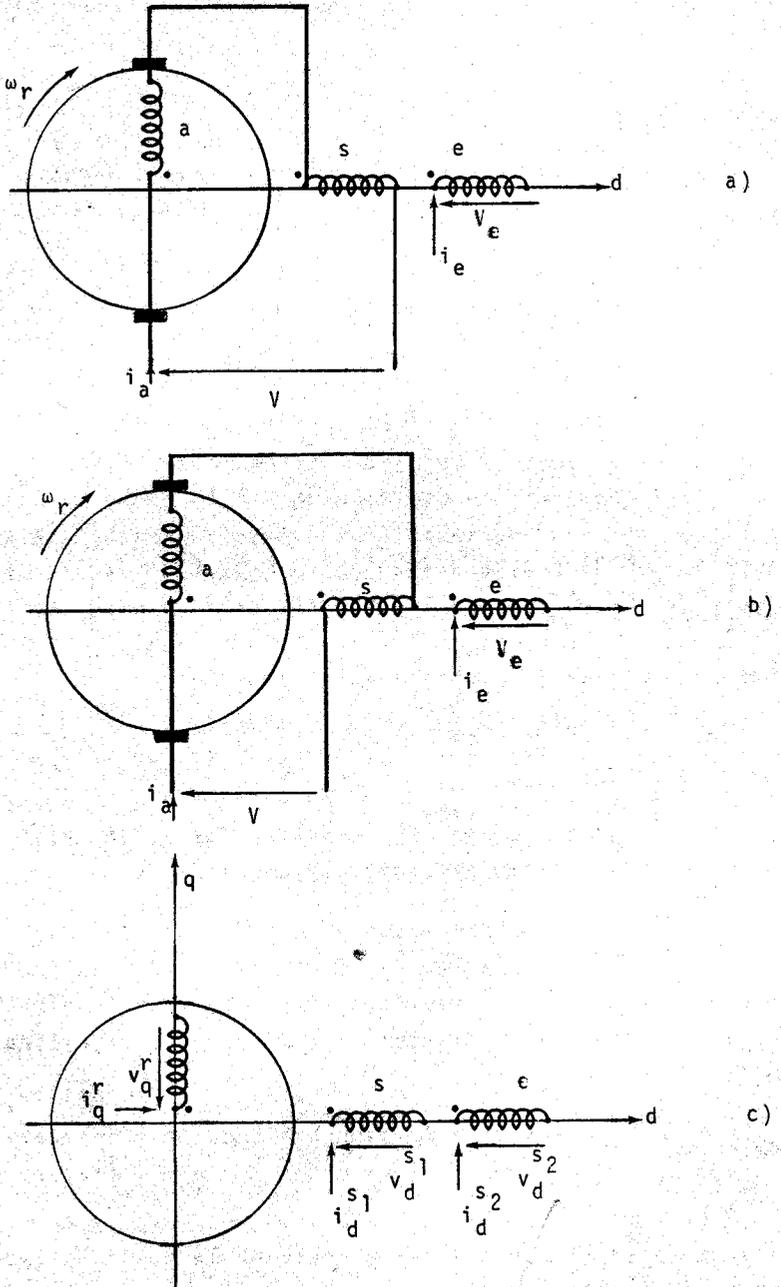


Figura 3.2

$$= \begin{bmatrix} s_1 \\ \pm v_d \\ s_2 \\ v_d \end{bmatrix} + v_G^r = [v]$$

La corrispondente matrice delle impedenze, dedotta dalla (3.2) e dall'esame delle figure 3.2a,b, è la seguente:

$$[Z'] = \begin{bmatrix} (R_s + L_s p) & M_{se} p & 0 \\ M_{se} p & (R_e + L_e p) & 0 \\ 0 & 0 & (R_a + L_a p) \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Dalle (2.10), (2.11) e dalla (3.2), sostituendo $R = R_a + R_s$, $L = L_a + L_s$, si ottiene il seguente sistema di equazioni di funzionamento, valido in regime comunque variabile:

$$\begin{bmatrix} V \\ V_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (R + Lp \pm \omega_r M_{as}) & (\omega_r M_{ae} \pm M_{se} p) \\ \pm M_{se} p & (R_e + L_e p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_e \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

e l'espressione della coppia elettromagnetica:

$$C_e = (\text{paia poli}) (M_{ae} i_e i_a \pm M_{as} i_a^2). \quad (3.10)$$

Si noti che:

- $M_{se} = M_{d d}^{(s_1)(s_2)} = M_{d d}^{(s_2)(s_1)}$ è la mutua induttanza tra i due avvolgimenti di statore allineati lungo l'asse d;
- $M_{ae} = M_{d d}^{r(s_2)}$ è il valore massimo della mutua induttanza tra l'avvolgimento di armatura "a" e quello "e" di statore nell'ipotesi di moto relativo delle spazzole (v. par. 1.8). Il massimo si ha quando gli assi degli avvolgimenti sono allineati lungo l'asse d;
- $M_{as} = M_{d d}^{r(s_1)}$ è il valore massimo della mutua induttanza tra l'avvolgimento di armatura "a" e quello "e" di statore come per M_{ae} ;
- il segno + corrisponde a serie addizionale nel funzionamento da motore (sottrattiva nel generatore) e il segno - a serie sottrattiva nel funzionamento da generatore (addizionale nel motore).

Per lo studio del funzionamento di regime, ponendo $p = 0$ risulta :

$$\begin{bmatrix} V \\ V_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R + \omega_r M_{as} & \omega_r M_{ae} \\ 0 & R_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_e \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$C_e = (\text{paia poli})(M_{ae} I_e I_a + M_{as} I_a^2) \quad (3.12)$$

Le equazioni precedenti consentono di individuare le caratteristiche di funzionamento a regime delle macchine a c.c. con eccitazione tipo serie ($I_e = 0$), tipo indipendente (senza avvolgimento s) e tipo compound. Nei paragrafi seguenti saranno esaminate in dettaglio queste caratteristiche.

Si noti che il termine $\omega_r M_{ae} I_e$ che compare nella (3.11) è la tensione a vuoto ai morsetti della macchina (per $I_a = 0$), deducibile dalla legge generale dell'induzione $e = d\phi_c/dt$ ove $M_{ae} I_e$ è il flusso (massimo) concatenato dall'avvolgimento di rotore nell'ipotesi di allineamento degli assi dei due avvolgimenti lungo l'asse d (v. par. 1.11).

3.4 - Caratteristiche di funzionamento di una macchina a c.c. con eccitazione tipo serie.

La macchina con eccitazione tipo serie si può pensare derivata da quella tipo compound eliminando l'avvolgimento "e". Poiché il funzionamento da generatore è molto raro, si considera qui solo quello da motore.

Le equazioni di funzionamento elettrico e meccanico sono quindi le seguenti :

$$\begin{cases} V = (R + \omega_r M_{as}) I_a \\ C_e = (\text{paia poli})(M_{as} I_a^2) = C_r \end{cases} \quad (3.13)$$

Le più interessanti caratteristiche relative al funzionamento da motore (e che verranno considerate anche per le altre macchine) sono le seguenti :

- caratteristica elettromeccanica della coppia, che dà l'andamento della coppia in funzione della corrente di armatura;
- caratteristica elettromeccanica della velocità, che dà l'anda-

- mento della velocità in funzione della corrente di armatura;
- caratteristica meccanica, che dà l'andamento della coppia in funzione della velocità.

Le caratteristiche riportate in figura 3.3 sono dedotte dalle equazioni (3.13). E' importante osservare che :

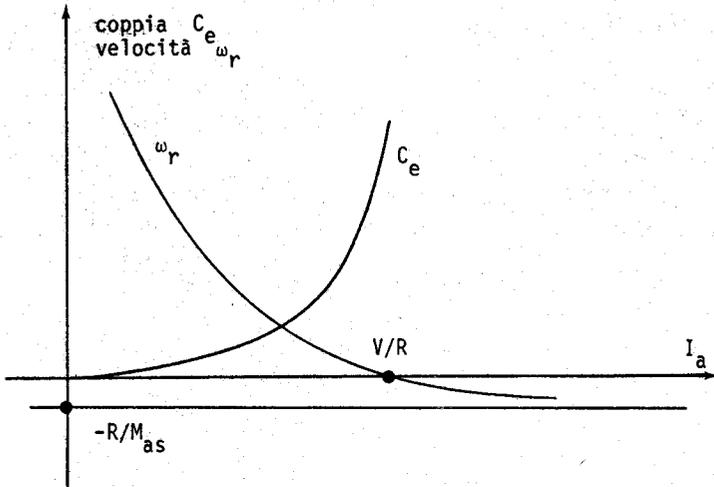


Figura 3.3

- la caratteristica di velocità è un'iperbole equilatera rispetto all'asse della velocità e ad un asse traslato rispetto a quello della corrente di $(-R/M_{as})$. Il punto a velocità nulla ($\omega_r = 0$) corrisponde alla corrente di spunto $(I_a)_{sp} = V/R$;
- la caratteristica di coppia è una parabola con vertice nell'origine degli assi.

La caratteristica meccanica, riportata in fig. 3.4, è retta dalla seguente relazione :

$$C_e = (\text{paia poli}) \cdot \frac{M_{as}}{(R + \omega_r M_{as})^2} V^2 = (\text{paia poli}) M_{as} I_a^2 \quad (3.14)$$

L'andamento è quello tipico di una iperbole equilatera rispetto all'asse della velocità e ad un asse traslato rispetto a quello della coppia di $-(R/M_{as})$. Si noti l'elevato valore della coppia di spunto e l'elevata velocità raggiungibile con coppia di carico nulla (velocità di fuga).

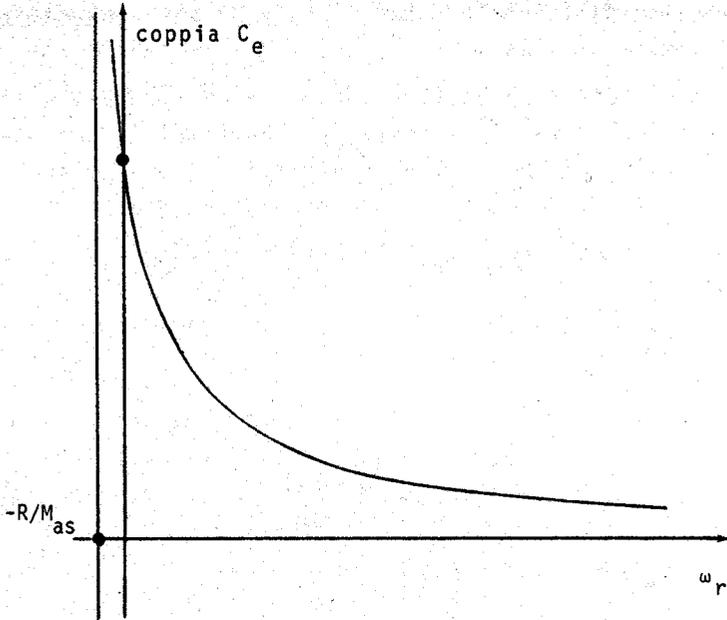


Figura 3.4

Lo studio sin qui condotto non tiene conto della saturazione che interviene quando la corrente I_a supera un certo valore e deforma le caratteristiche, limitando gli andamenti iperbolici o parabolici sopra esposti solo ad alcune zone di funzionamento.

3.5 - Caratteristiche di funzionamento di una macchina a c.c. con eccitazione indipendente

La macchina con eccitazione indipendente si può pensare derivata da quella tipo compound eliminando l'avvolgimento s.

Le equazioni di funzionamento sono quindi le seguenti

$$\begin{aligned}
 V_e &= R_e I_e \\
 V &= \omega_r M_{ae} I_e + R_a I_a = E + R_a I_a \\
 C_e &= (\text{paia poli})(M_{ae} I_e I_a) = C_r
 \end{aligned}
 \tag{3.15}$$

ove

$E = \omega_r M_{ae} I_e = \omega_r \phi_{ae}$ è la f.e.m. indotta nell'avvolgimento di rotore per effetto rotazionale dal flusso $\phi_{ae} (= M_{ae} I_e)$

sostenuto dall'avvolgimento di eccitazione e concatenato con quello di armatura.

Le caratteristiche elettromeccaniche di coppia e velocità a eccitazione costante ($I_e = \text{cost}$), per entrambi i funzionamenti da motore e da generatore, sono riportate in fig. 3.5 per due diversi valori di I_e . Le equazioni corrispondenti sono :

$$C_e = (\text{paia poli})(M_{ae} I_e I_a) = (\text{paia poli})(\phi_{ae} I_a)$$

$$\omega_r = \frac{V - R_a I_a}{M_{ae} I_e} \quad (3.16)$$

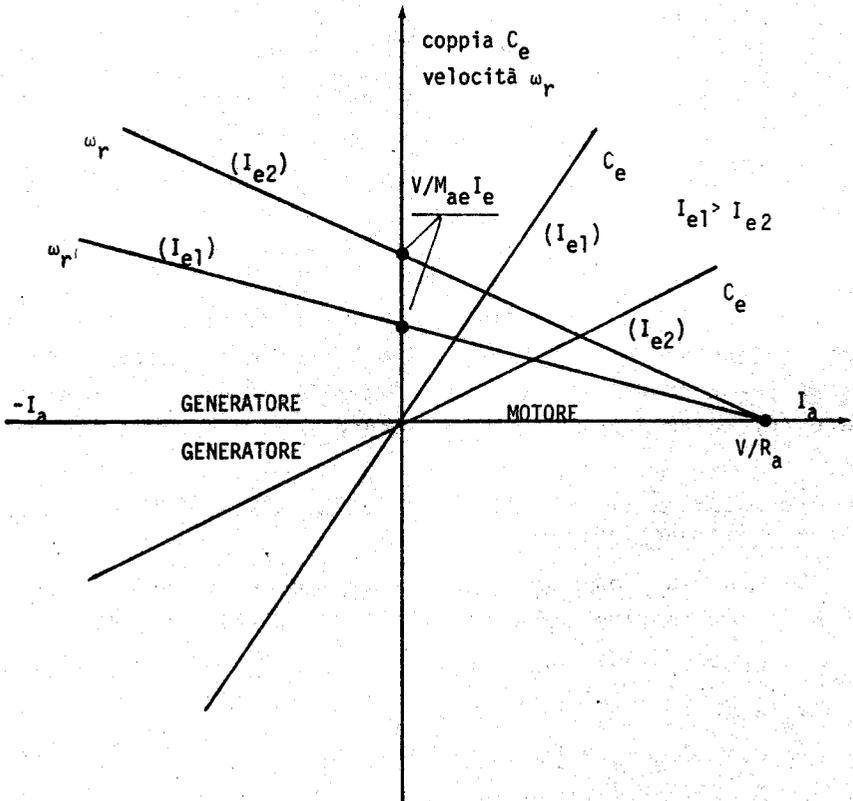


Figura 3.5

Funzionamento da generatore (I_a negativa). E' ottenibile con corrente di armatura negativa senza inversioni del senso di rotazione rispetto a quello che si ha nel funzionamento da motore. Il passaggio da valori positivi a quelli negativi di I_a si ottiene agendo sull'eccitazione e quindi sulla f.e.m. E (3.15).

Le caratteristiche più significative del funzionamento da generatore sono le seguenti :

- caratteristica a vuoto che esprime la relazione tra tensione a vuoto ai morsetti di armatura e corrente di eccitazione

$$V = \omega_r M_{ae} I_e \quad (3.17)$$

La caratteristica è in realtà lineare solo nel primo tratto, in quanto all'aumentare di I_e intervengono i fenomeni di saturazione che ne determinano un incurvamento. Inoltre, a causa della presenza di un flusso residuo (dovuto a precedenti funzionamenti della macchina) esiste una tensione a vuoto anche in assenza di eccitazione (v. fig. 3.6);

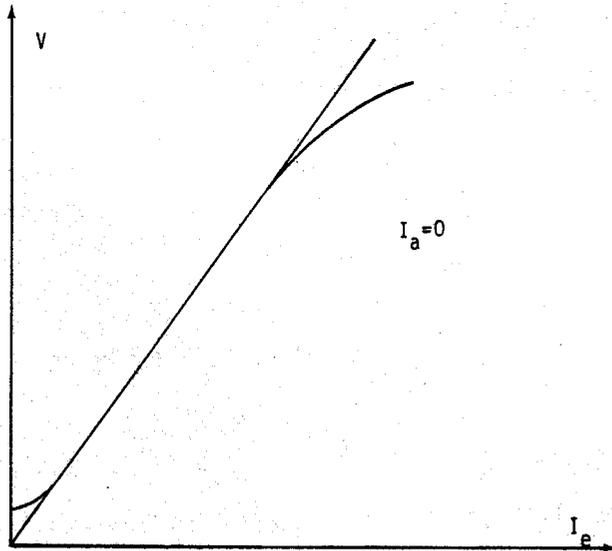


Figura 3.6

- caratteristica esterna che esprime la relazione tra tensione e corrente di armatura con corrente di eccitazione I_e e velocità di rotazione costanti (v. fig. 3.7). La caratteristica è lineare solo trascurando la diminuzione del flusso connessa alla reazione di indotto.

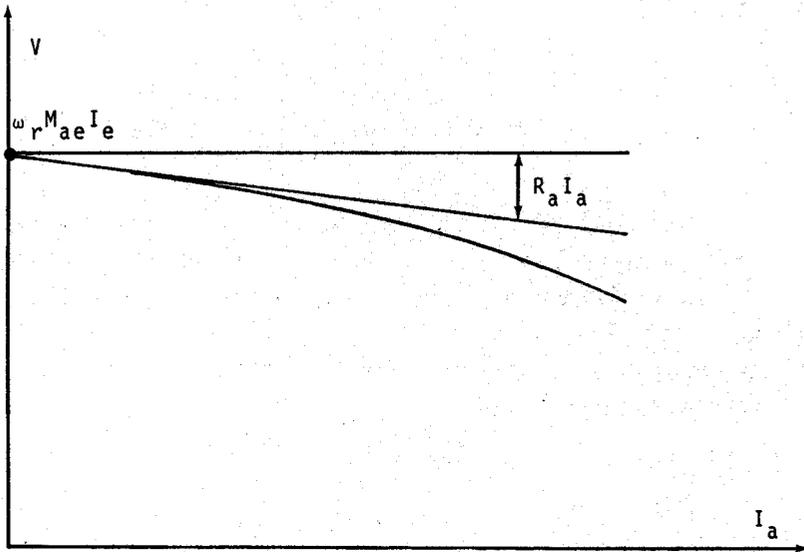


Figura 3.7

Funzionamento da motore (I_a positivo). La caratteristica meccanica è retta dalla seguente relazione :

$$C_e = (\text{paia poli}) M_{ae} I_e \frac{V - \omega_r M_{ae} I_e}{R_a} \quad (3.18)$$

o, esplicitando ω_r in funzione di I_a dall'equazione della tensione (3.15), dalla relazione

$$\omega_r = (\omega_r)_0 - \frac{R_a}{(M_{ae} I_e)^2} C_e \quad (3.19)$$

La caratteristica corrispondente è riportata in fig. 3.8: l'andamento è lineare come quello della caratteristica elettromeccanica della velocità.

La pendenza della caratteristica è data dal rapporto $R_a / (M_{ae} I_e)^2$ che ha generalmente un valore molto piccolo in cor-

rispondenza del valore nominale di I_e : ciò significa che, in condizioni nominali di eccitazione, la caratteristica è lineare, con velocità circa costante al variare del carico.

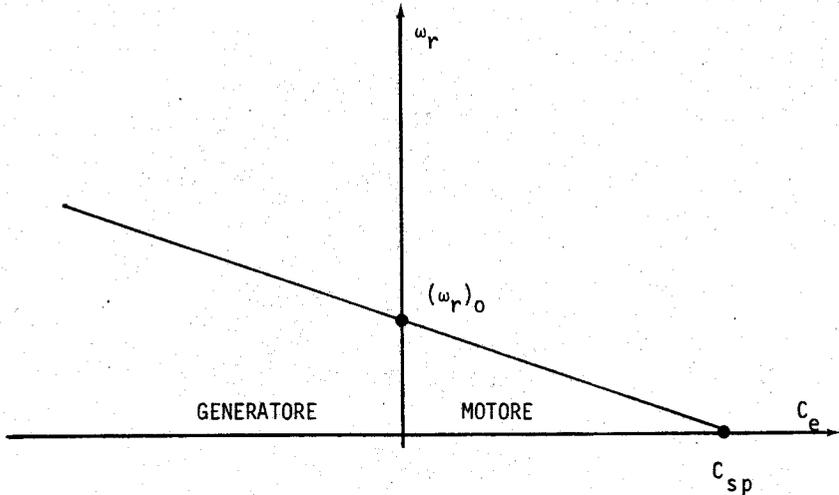


Figura 3.8

Al variare della tensione di armatura (a $I_e = \text{cost}$) o della corrente I_e di eccitazione (a $V = \text{cost}$) le caratteristiche meccaniche si modificano come indicato in figura 3.9. E' quindi evidente che, agendo sia sul circuito di armatura sia su quello di eccitazione, è possibile regolare la velocità di rotazione. Ciò è possibile, a livello industriale, mediante ponti raddrizzatori che realizzano la conversione c.a. - c.c. oppure, a partire da una sorgente in c.c., mediante choppers che realizzano la conversione c.c. - c.c. .

3.6 - Caratteristiche di funzionamento di una macchina a c.c. con eccitazione derivata

In figura 3.10 è riportato lo schema di una macchina con eccitazione derivata.

Funzionamento da motore. Il funzionamento è simile a quello del motore a eccitazione indipendente con tensione V di alimentazione costante applicata sia al circuito di armatura sia a quello di eccitazione.

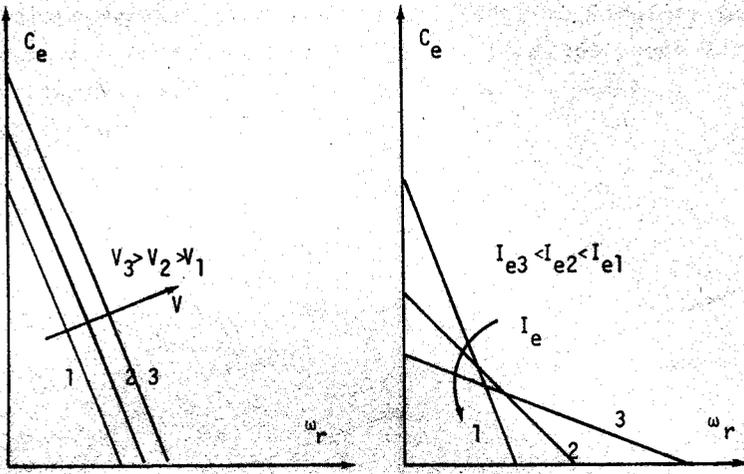


Figura 3.9

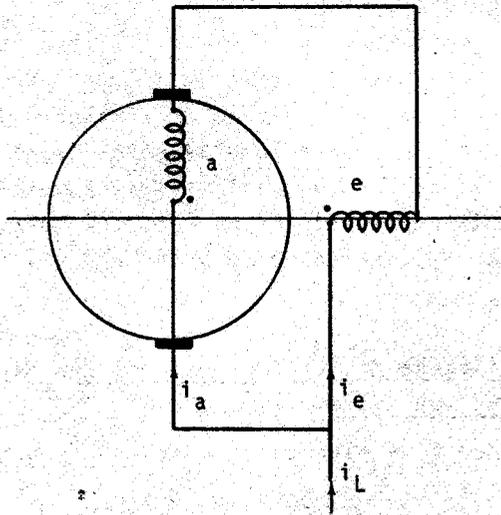


Figura 3.10

Funzionamento da generatore. Per lo studio del funzionamento da generatore non si può prescindere dalla caratteristica di magnetizzazione della macchina (flusso - f.m.m. di eccitazione) e quindi dai fenomeni di flusso residuo e di saturazione.

Il flusso residuo genera una f.e.m. indotta nell'avvolgimento di armatura rotante che è applicata, attraverso le spazzole, all'avvolgimento di eccitazione. La tensione continua tende a crescere in modo lineare con la corrente di eccitazione e la macchina funziona in "autoeccitazione" sino a quando, per effetto della saturazione, il flusso al traferro tende a un valore costante.

La situazione di equilibrio (punto di funzionamento a vuoto) è raggiunta quando la caratteristica di tensione (curva di magnetizzazione) interseca la caratteristica esterna del circuito di eccitazione (v. fig. 3.11).

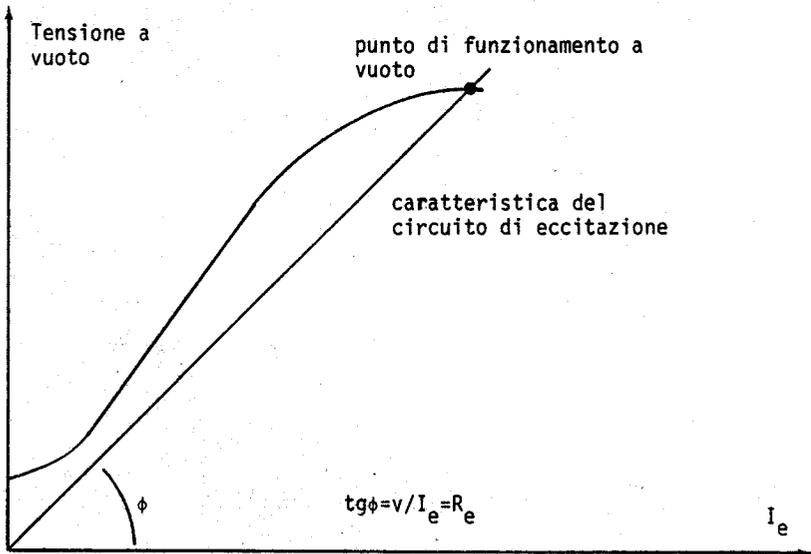


Figura 3.11

Si noti che esiste un valore critico della resistenza del circuito di eccitazione al di sopra del quale non è possibile la autoeccitazione, e così pure una velocità critica, al di sotto della quale la macchina stenta ad eccitarsi.

Si noti inoltre che un eventuale corto circuito ai morsetti del generatore riduce a zero l'eccitazione, e la corrente di corto circuito, sostenuta dal solo flusso residuo, è modesta.

Dalle considerazioni sin qui fatte è evidente che lo studio di questa macchina richiede o di esprimere la caratteristica di magnetizzazione mediante una funzione (ad es. di tipo esponenziale oppure somma di più spezzate) o l'impiego di metodi grafici.

In figura 3.12 è riportata una schematizzazione, mediante due spezzate, della caratteristica di magnetizzazione.

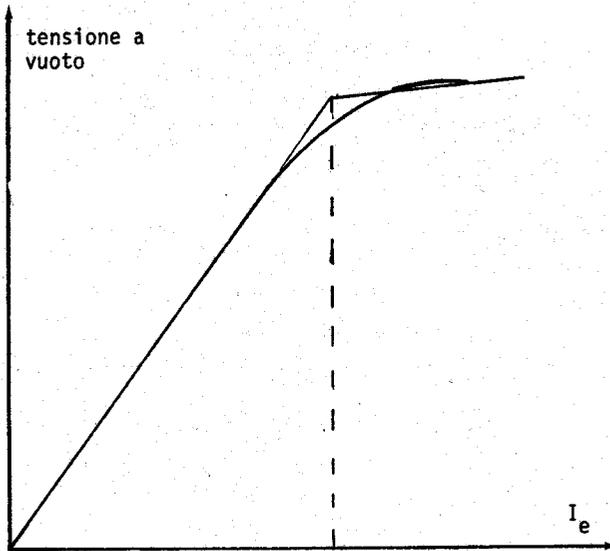


Figura 3.12

3.7 - Avvolgimenti compensatori e poli ausiliari nelle macchine a c.c.

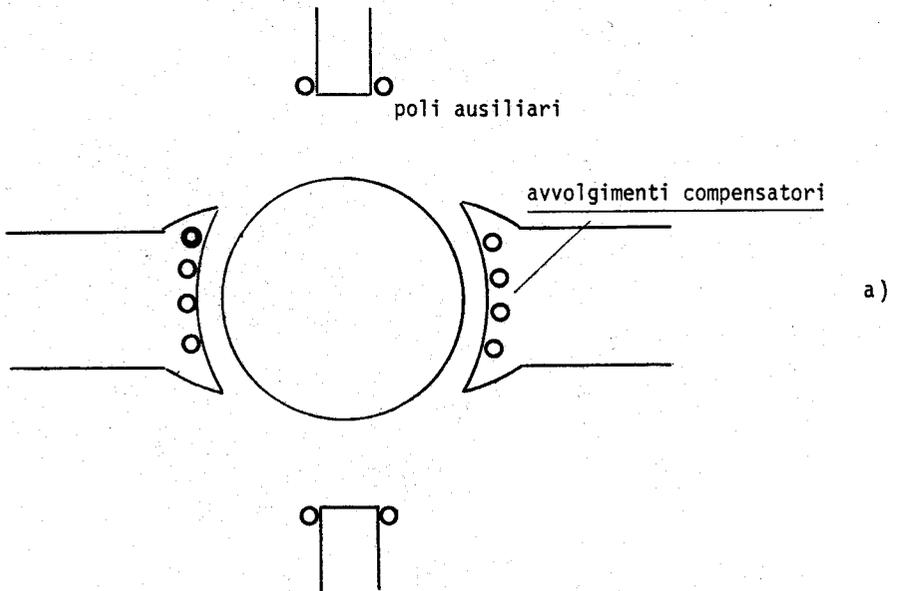
Durante il funzionamento a carico delle macchine a c.c. alla distribuzione di f.m.m. sostenuta dall'avvolgimento di eccitazione si sovrappone la distribuzione di f.m.m. sostenuta dalle correnti circolanti nell'avvolgimento di armatura (reazione di indotto). Ciò ha come conseguenza uno spostamento dell'asse polare e dell'asse neutro (che non coincidono più con gli assi d

e q), una disuniforme distribuzione delle tensioni tra lamelle contigue del collettore (con conseguente scintillio alle spazzole) ed una riduzione del flusso sostenuto dagli avvolgimenti di eccitazione (f.m.m. di reazione trasversale o in quadratura).

I provvedimenti più comuni per ridurre le anomalie causate dalla reazione di indotto consistono nell'introduzione dei poli ausiliari (o di commutazione), disposti lungo l'asse interpolare o asse q e degli avvolgimenti compensatori disposti in cave sull'espansione polare, in serie con l'avvolgimento di armatura come indicato in figura 3.13 .

I poli ausiliari vengono generalmente utilizzati in tutte le macchine di potenza superiore a 1 kW, mentre gli avvolgimenti compensatori sono presenti solo in macchine di potenza relativamente elevata.

La macchina primitiva è riportata in figura 3.13c: si indica con "c" l'avvolgimento compensatore e con "pa" l'avvolgimento dei poli ausiliari.



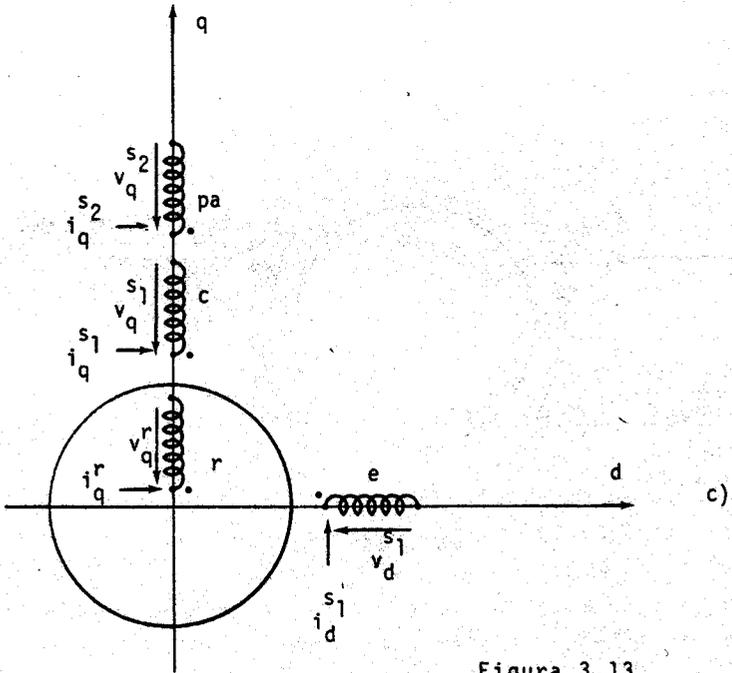
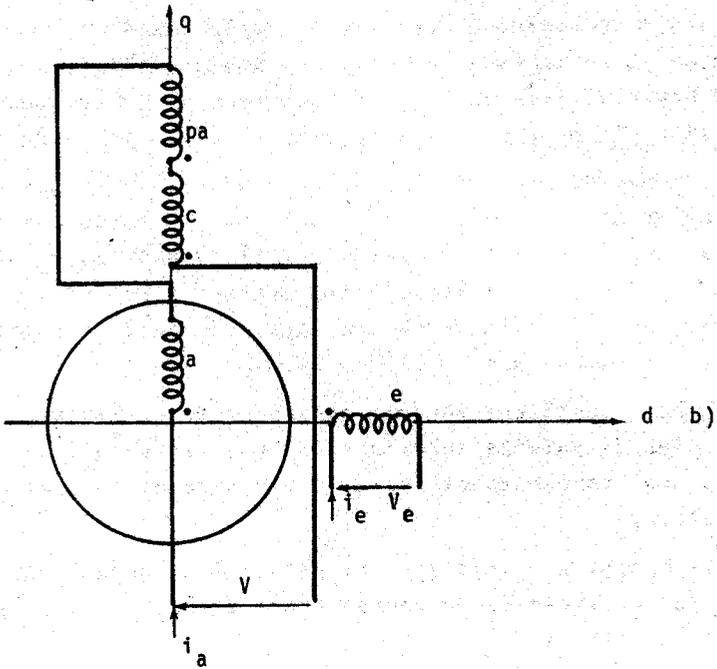


Figura 3.13

Il passaggio da macchina reale a macchina primitiva si realizza mediante una trasformazione di tipo attivo (v. par. 3.3):

$$i_q^r = i_a \quad i_q^{s1} = -i_a \quad i_q^{s2} = -i_a$$

$$i_d^{s1} = i_e$$

$$v_q^r = v_a \quad v_q^{s1} = v_{pa} \quad v_q^{s2} = v_c$$

$$v_d^{s1} = v_e$$

$$V = v_q^r - v_q^{s1} - v_q^{s2} \quad (3.20)$$

e, in forma matriciale (v. par. 2.2) :

$$\begin{bmatrix} i_d^{s1} \\ i_q^{s1} \\ i_q^{s2} \\ i_q^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_e \end{bmatrix} = [B] [i] \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} v \\ v_e \end{bmatrix} &= [B]_t [v] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_d^{s1} \\ v_q^{s1} \\ v_q^{s2} \\ v_q^r \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -v_q^{s1} & -v_q^{s2} & +v_q^r \\ & v_d^{s1} & \end{bmatrix} = [v] \quad (3.22) \end{aligned}$$

Il sistema di equazioni di funzionamento della macchina primitiva è il seguente (v. par. 1.13):

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ v_d \\ v_q^{s_1} \\ v_q^{s_2} \\ v_q^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (R_d^{s_1} + L_d^{s_1} p) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (R_q^{s_1} + L_q^{s_1} p) & M_{qq}^{(s_1)(s_2)} p & M_{qq}^{(s_1)r} p \\ 0 & M_{qq}^{(s_2)(s_1)} p & (R_q^{s_2} + L_q^{s_2} p) & M_{qq}^{(s_2)r} p \\ \omega_r M_{dd}^r(s_1) & M_{qq}^r(s_1) p & M_{qq}^r(s_2) p & (R_q^r + L_q^r p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d^{s_1} \\ i_q^{s_1} \\ i_q^{s_2} \\ i_q^r \end{bmatrix} = \\
 = \begin{bmatrix} (R_e + L_e p) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (R_c + L_c p) & M_{cpa} p & M_{ac} p \\ 0 & M_{cpa} p & (R_{pa} + L_{pa} p) & M_{apa} p \\ \omega_r M_{ae} & M_{ac} p & M_{apa} p & (R_a + L_a p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d^{s_1} \\ i_g^{s_1} \\ i_q^{s_2} \\ i_q^r \end{bmatrix} = \quad (3.23)$$

La corrispondente matrice delle impedenze è la seguente :

$$[Z] = \begin{bmatrix} (R_e + L_e p) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (R_c + L_c p) & M_{cpa} p & M_{ac} p \\ 0 & M_{cpa} p & (R_{pa} + L_{pa} p) & M_{apa} p \\ 0 & M_{ac} p & M_{apa} p & (R_a + L_a p) \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Dalle (2.10), (2.11) e dalla (3.23) si ottiene il seguente sistema di equazioni, valido in regime comunque variabile :

$$\begin{bmatrix} v \\ v_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (R_a + R_c + R_{pa}) + \\ + (L_a + L_c + L_{pa} + 2 M_{cpa} - 2 M_{ac} - 2 M_{apa}) p & \omega_r M_{ae} \\ 0 & (R_e + L_e p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_e \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Si noti che il sistema (3.25) è simile a quello relativo ad una macchina a eccitazione indipendente con resistenza di armatura uguale alla somma delle resistenze, e auto induttanza di armatura uguale alla combinazione delle induttanze entro parentesi nella prima riga della matrice delle impedenze del sistema (3.25).

Si noti inoltre che, con avvolgimento compensatore e avvol

gimento di armatura di ugual numero di spire, si ha :

$$L_a \approx L_c \approx M_{ac} \quad (3.26)$$

e quindi

$$L_a + L_c - 2 M_{ac} \approx 0. \quad (3.27)$$

La auto induttanza L_{pa} è invece $\ll L_a$.

3.8 - Transitorio di inserzione di una macchina a c.c. a eccitazione indipendente

Si consideri un motore a eccitazione indipendente, inizialmente fermo e eccitato, all'armatura del quale venga applicata bruscamente una tensione V costante: la macchina raggiunge la situazione di regime dopo un certo periodo di funzionamento transitorio.

Le ipotesi semplificative che si introducono, oltre a quelle già definite nel paragrafo 1.2, sono le seguenti :

- la corrente di eccitazione I_e è costante. Pure costante è il flusso al traferro lungo l'asse d (si trascura la reazione di indotto);
- sul motore non agiscono coppie resistenti;
- la sorgente di alimentazione è a potenza infinita e quindi la tensione V è costante per qualsiasi valore della corrente assorbita dal motore.

L'equazione di funzionamento del circuito di armatura e quella relativa al funzionamento meccanico, dedotte dalle (3.9), (3.10) e (3.4) sono quindi le seguenti :

$$V = (R_a + L_a p) i_a + \omega_r M_{ae} I_e \quad (3.28)$$

$$(paia\ poli) M_{ae} I_e i_a = J p \omega_m \quad (3.29)$$

Dalla (3.29) si deduce l'espressione della corrente in funzione della velocità ω_m :

$$i_a = \frac{J}{(paia\ poli) M_{ae} I_e} p \omega_m = \frac{J}{K} p \omega_m \quad (3.30)$$

Sostituendo nella (3.28) si perviene all'equazione differenziale che regge il transitorio della velocità :

$$\frac{V K}{L_a J} = p^2 \omega_m + \frac{R_a}{L_a} p \omega_m + \omega_m \frac{M_{ae} I_e K}{L_a J} \quad (3.31)$$

I coefficienti dell'equazione differenziale (3.31) hanno significati fisici ben precisi :

- $L_a/R_a = T_a =$ costante di tempo elettromagnetica del circuito di armatura;

- $\frac{R_a J}{M_{ae} I_e K} = \frac{R_a J}{(\text{paia poli}) M_{ae}^2 I_e^2} = T_m =$ costante di tempo elettromeccanica dell'indotto;

- $\frac{M_{ae} I_e K}{L_a J} = \frac{1}{T_a T_m}$;

- $\frac{V K}{L_a J} = \frac{M_{ae} I_e K}{L_a J} \cdot \frac{V}{M_{ae} I_e} = \omega_R \frac{1}{T_a T_m}$

ove $\omega_R = \frac{V}{M_{ae} I_e}$ è la velocità di regime.

I transitori della corrente di armatura e della velocità sono quindi retti rispettivamente dalla costante di tempo elettromagnetica T_a e dalla costante di tempo elettromeccanica T_m .

L'equazione (3.31) è una equazione differenziale del II° ordine a coefficienti costanti. La corrispondente equazione caratteristica è :

$$\alpha^2 + \frac{1}{T_a} \alpha + \frac{1}{T_a T_m} = 0. \quad (3.32)$$

In relazione al valore del discriminante si hanno diverse possibili soluzioni e diversi andamenti :

$\Delta > 0$ per $T_m > 4 T_a$. 2 radici reali e distinte.

L'integrale della equazione differenziale è la somma di due esponenziali e si ha un andamento smorzato non pendolare della velocità (v. fig. 3.14a). La corrente invece, dopo aver raggiunto un valore massimo, si smorza con legge esponenziale e raggiunge asintoticamente il valore nullo.

$\Delta < 0$ per $T_m < 4 T_a$. 2 radici complesse e coniugate.

L'integrale della equazione differenziale è somma di due

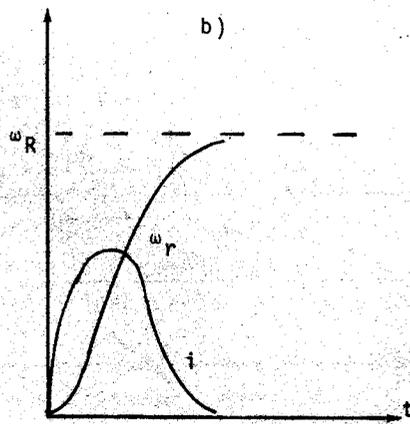
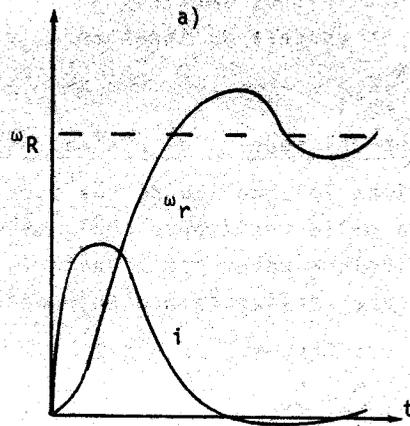
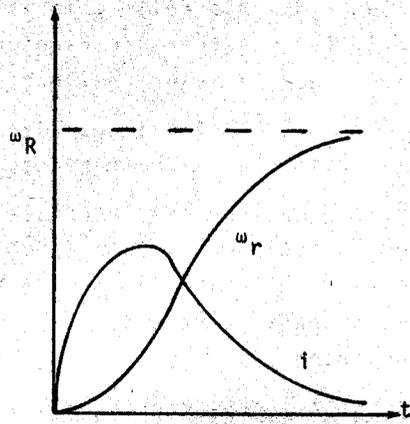


Figura 3.14

c)

esponenziali e si ha un andamento della velocità di tipo pendolare smorzato (v. fig. 3.14b). La corrente raggiunge il valore massimo e successivamente tende al valore nullo oscillando e passando quindi anche per valori negativi.

$\Delta=0$ per $T_m = 4 T_a$. 2 radici reali e coincidenti.

L'integrale della equazione differenziale è del tipo $e^{\alpha t}(A+Bt)$ e la corrente raggiunge il valore nullo di regime nel tempo più breve possibile. L'andamento si dice smorzato critico (v. fig. 3.14c). Analogamente la velocità raggiungerà il valore di regime senza pendolazioni.

Si noti che in tutti i casi considerati la presenza della induttanza dell'indotto riduce sensibilmente il valore massimo della corrente che, in assenza di induttanza, varrebbe, all'istante iniziale, V/R .

3.9 - Identificazione del modello di una macchina in c.c.

L'identificazione del modello di una macchina in c.c. richiede la misura sia delle resistenze degli avvolgimenti sia delle induttanze. Particolare interesse riveste la misura di queste ultime, che deve essere realizzata mediante metodi di misura in c.c.

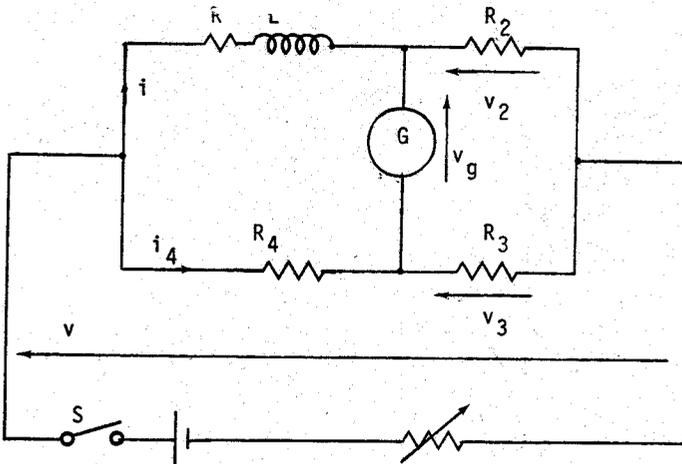


Figura 3.15

Un possibile schema di circuito di misura è riportato in figura 3.15: il bipolo (R,L) rappresenta l'avvolgimento della macchina (di resistenza R e di auto induttanza L); R_2, R_3, R_4 sono resistori di tipo non induttivo, scelti in modo tale che il ponte sia inizialmente equilibrato ($R_3/R_4 = R_2/R$); lo strumento di misura G è un galvanometro balistico. All'atto dell'apertura dell'interruttore S, la corrente nell'induttore L si mantiene costante al valore di regime (I) e quindi decresce esponenzialmente sino ad annullarsi.

La tensione sul galvanometro vale

$$v_g = v_2 - v_3 \quad (3.33)$$

Per il calcolo di v_g si valutano le correnti i_4 e i :

$$i_4 = \frac{v}{R_3 + R_4} \quad (3.34)$$

$$v = (R + R_2)i + L \frac{di}{dt} \quad \text{da cui} \quad i = \frac{v}{R + R_2} - \frac{L}{R + R_2} \frac{di}{dt} \quad (3.35)$$

e quindi le tensioni v_2 e v_3 :

$$v_2 = R_2 i = \frac{v R_2}{R + R_2} - \frac{L R_2}{R + R_2} \frac{di}{dt} \quad (3.36)$$

$$v_3 = R_3 i_4 = \frac{v R_3}{R_3 + R_4} \quad (3.37)$$

Utilizzando la condizione di equilibrio ($R_3/R_4 = R_2/R$), risulta:

$$v_g = - \frac{R_2}{R + R_2} L \frac{di}{dt} \quad (3.38)$$

L'indicazione del galvanometro G è proporzionale all'integrale, nel tempo, di v_g :

$$\psi = K \int_0^{\infty} v_g dt = - \frac{K R_2}{R + R_2} L \int_I^0 \frac{di}{dt} = \frac{K R_2}{R + R_2} L I \quad (3.39)$$

Se i resistori del ponte sono scelti in modo tale che $R_3 = R_4$ risulta anche $R_2 = R$ e quindi $\psi = K L I$ da cui si risale alla espressione della auto induttanza dell'avvolgimento:

$$L = \frac{2 \psi}{K I} \quad (3.40)$$

Questo metodo è stato sviluppato da C.V.Jones e da J.C. Prescott e A.K. El-Karaschi [8].

Il vantaggio fondamentale di questo metodo è che esso consente la misura della auto induttanza di un avvolgimento anche in presenza di altri avvolgimenti, disposti sulla stessa struttura magnetica, indipendentemente dal fatto che essi siano aperti o cortocircuitati. Ciò può essere dimostrato considerando come induttore incognito il primario di un trasformatore di parametri R, L , con secondario chiuso in corto circuito.

Sia i_2 la corrente secondaria, i_1 la corrente primaria e M la mutua induttanza tra primario e secondario. L'equazione (3.35) si modifica nel seguente modo :

$$v = (R+R_2) i_1 + L \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad (3.41)$$

da cui

$$i_1 = \frac{v}{(R+R_2)} - \frac{L}{(R+R_2)} \frac{di_1}{dt} - \frac{M}{(R+R_2)} \frac{di_2}{dt} \quad (3.42)$$

e

$$\begin{aligned} \psi' = K \int_0^\infty v_g dt &= -\frac{K}{R+R_2} L \int_1^0 \frac{di_1}{dt} - \frac{K M}{(R+R_2)} \int_0^\infty \frac{di_2}{dt} dt = \\ &= \psi - \frac{K M}{(R+R_2)} \int_{I_2=0}^{I_2=0} di_2 = \psi \end{aligned} \quad (3.43)$$

in quanto il valore iniziale e finale della corrente nel secondario è sempre nullo.

Il circuito di figura 3.15 può essere utilizzato anche per la misura di mutue induttanze, apportando le modifiche indicate in figura 3.16.

La presenza di un generatore di tensione sul circuito secondario in serie all'avvolgimento (R, L) e a un resistore R_5 consentono di equilibrare il ponte $(R_3/R_4 = R_2/R)$ in presenza di una corrente I_2 nel circuito secondario (e I_1 nel primario) di valore tale da creare nella macchina una condizione di saturazione prossima a quella reale. All'apertura dell'interruttore S la f.e.m. indotta nell'avvolgimento secondario è $M(di_1/dt)$. Si noti che la espressione di v_g cui si perviene è identica alla (3.38) pur di sostituire $M(di_1/dt)$ a $L(di/dt)$.

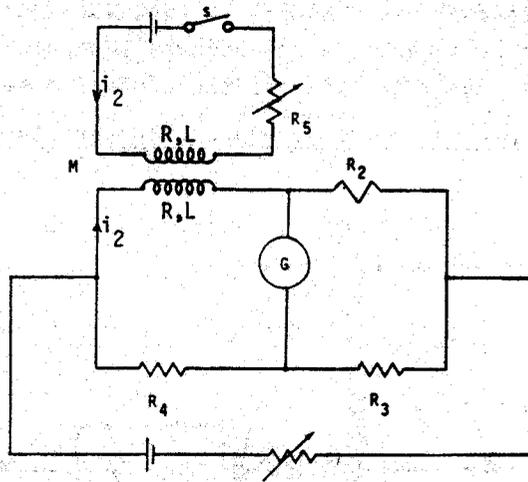


Figura 3.16

L'espressione della mutua induttanza è quindi :

$$M = \frac{(R+R_2)\psi}{R_2 I_1} \quad (3.44)$$

Il metodo illustrato consente quindi la misura delle auto e mutue induttanze di una macchina in c.c. e, nel caso delle mutue, consente anche di introdurre lo stato di saturazione della macchina.

Si noti tuttavia che i valori delle induttanze della macchina reale sono sensibilmente influenzati dal tipo di funzionamento e dalle caratteristiche della alimentazione e quindi particolare attenzione dovrà essere posta nello studio della macchina alimentata da generatori di tensione continua non ideali (ad es. ponti raddrizzatori, choppers).

I criteri di identificazione qui esposti possono essere utilizzati anche per l'individuazione di alcuni parametri del modello della macchina sincrona (v. par. 6.5).

3.10 - Equazioni di funzionamento di alcune macchine a collettore

Nel seguito verranno indicate le equazioni di funzionamento elettrico di alcune macchine a collettore, senza tuttavia approfondire lo studio delle caratteristiche di funzionamento.

Metadinamo generatrice con avvolgimento compensatore (v. figura 3.17)

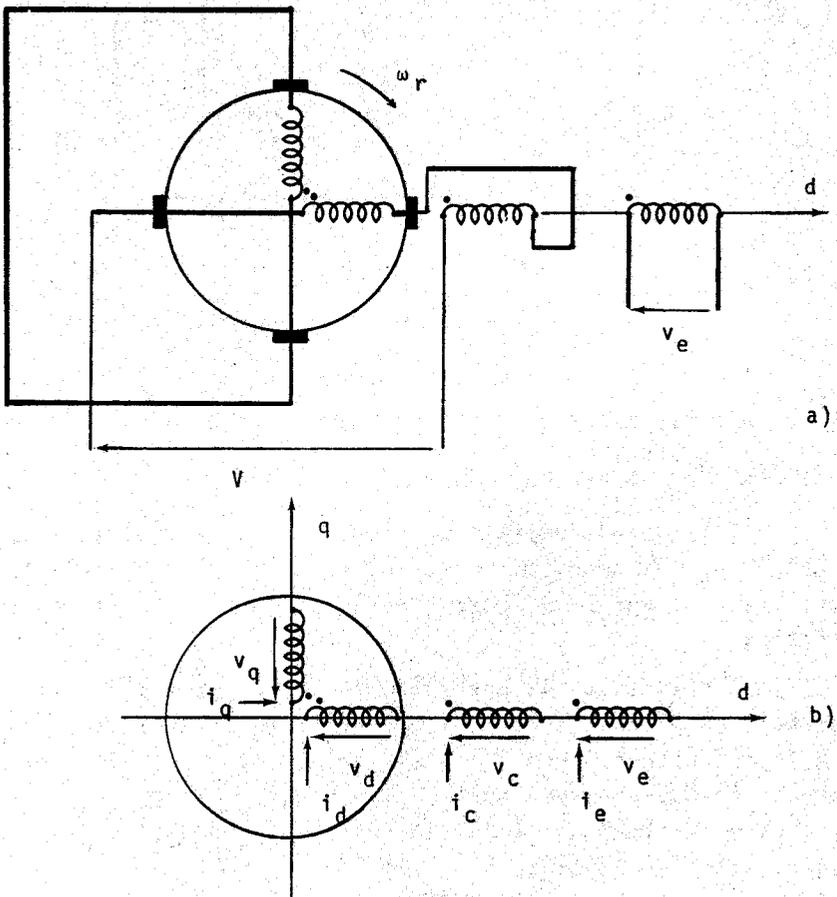


Figura 3.17

La metadinamo generatrice con avvolgimento compensatore ha una caratteristica esterna, tensione-corrente, che varia a seconda dell'entità della compensazione, come indicato in figura 3.18 (il parametro m è il rapporto tra la risultante delle f.m.m. lungo l'asse d e la sola f.m.m. di armatura).

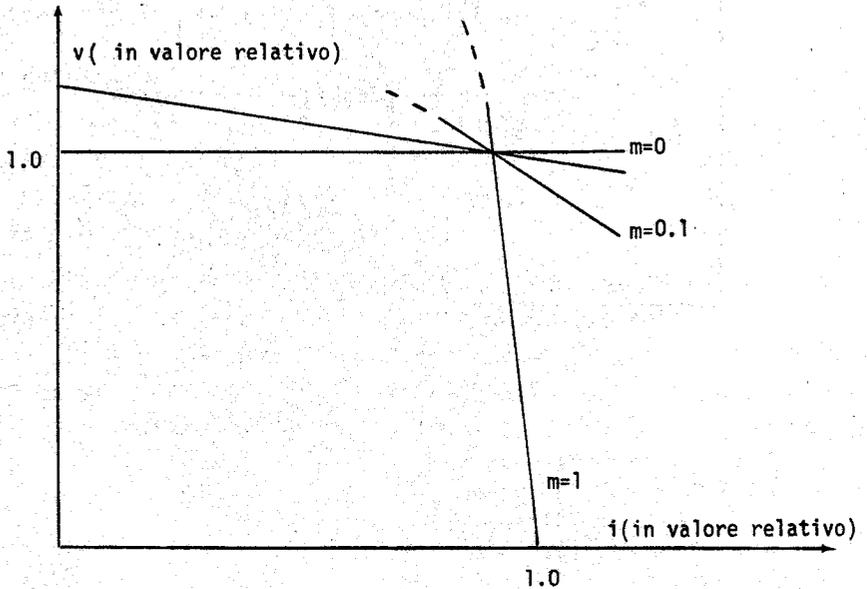


Figura 3.18

Le equazioni di funzionamento, dedotte da quelle della macchina primitiva in base alle trasformazioni attive, sono le seguenti :

$$\begin{bmatrix} v_e \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (R_e + L_e p) & (M_{ce} - M_{ae}) p \\ (M_{ae} - M_{ce}) p + \frac{\omega_r^2 L_a M_{ae}}{R_a + L_a p} & -(R_a + R_c) - (L_a + L_c - 2M_{cd}) p + \frac{\omega_r^2 L_a (M_{cd} - L_a)}{R_a + L_a p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_e \\ i \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

Motore a repulsione (v. fig. 3.19)

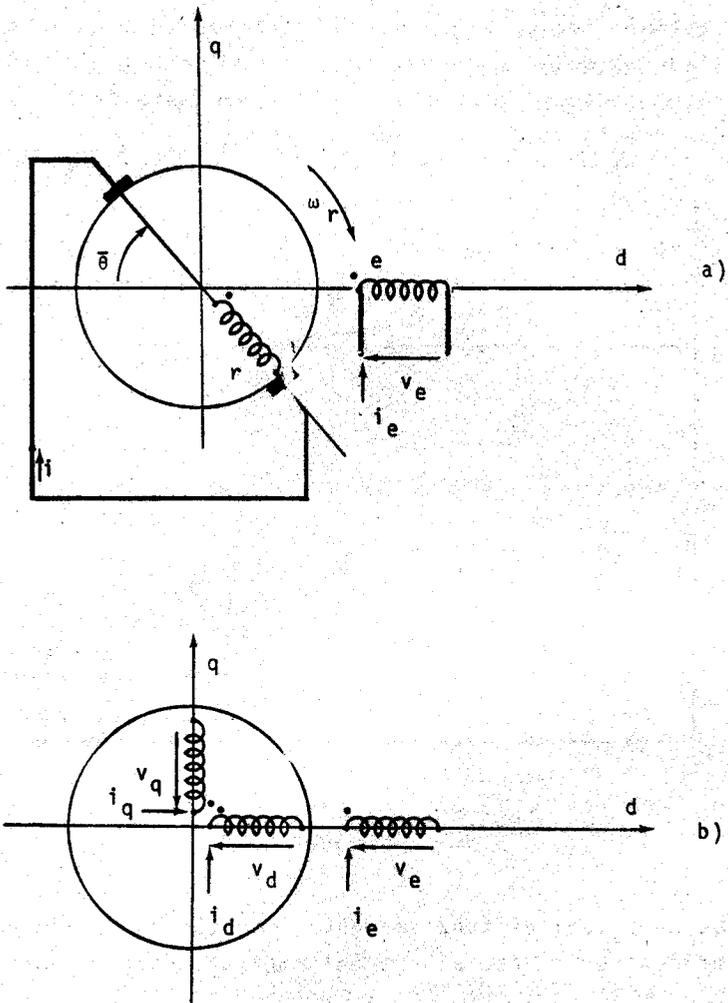


Figura 3.19

Le equazioni di funzionamento dedotte da quelle relative alla macchina primitiva sono le seguenti :

$$\begin{bmatrix} v_e \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (R_e + L_e p) & M_p \cos \bar{\theta} \\ (M_p \cos \bar{\theta} - \omega_r M \sin \bar{\theta}) & (R_a + L_a p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_e \\ i \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

ove M è il valore massimo della mutua induttanza tra l'avvolgimento di armatura "a" e l'avvolgimento di eccitazione "e".

La coppia istantanea ha la seguente espressione :

$$C_e = (paia\ poli) M (-i \sin \bar{\theta}) i_e \quad (3.47)$$

Si noti che il funzionamento normale del motore a repulsione prevede una tensione v_e alternata sinusoidale.

3.11 - Conclusioni

In questo capitolo è stato esaminato il funzionamento delle macchine a collettore, con particolare riguardo a quelle a c.c. che per la loro importanza nelle applicazioni industriali meritano uno studio più approfondito.

Le equazioni di funzionamento elettrico sono state dedotte utilizzando la trasformazione attiva e quindi la matrice di connessione $[B]$. Questo modo di procedere è stato seguito più a titolo di esempio che non per una effettiva utilità nei casi semplici qui considerati. E' intuibile che, in presenza di un numero elevato di avvolgimenti, l'impiego delle trasformazioni attive è assolutamente necessario.

Alcuni problemi quali lo studio del comportamento transitorio e del funzionamento con alimentazione da convertitori, sono stati, per motivi di spazio, solo accennati.